

# Intégrale stochastique

Plan

L'intégrale stochastique générale

Processus d'Itô

Formule d'Itô

Formule de Black & Scholes

Le processus  $B$  est un mouvement Brownien et  $\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$  est sa filtration naturelle.

# 1 L'intégrale stochastique générale

On cherche à définir

$$\int_0^t \theta_s dB_s$$

quand  $\{\theta_s, s \geq 0\}$  est un processus stochastique.

**Définition 1.1** *On dit que  $\{\theta_t, t \geq 0\}$  est un bon processus s'il est  $(\mathcal{F}_t^B)$ -adapté, càglàd, et si*

$$E \left[ \int_0^t \theta_s^2 ds \right] < +\infty$$

*pour tout  $t > 0$ .*

## 1.1 Cas des processus étagés

Ce sont les processus du type

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

où  $p_n \in \mathbb{N}$ ,  $0 = t_0 \leq t_1 \dots \leq t_{p_n}$  et  $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P)$  pour tout  $i = 0, \dots, p_n$ . On définit

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Propriétés:

$$\begin{aligned} E [I_t(\theta^n)] &= 0 \\ \text{Var} [I_t(\theta^n)] &= E \left[ \int_0^t (\theta_s^n)^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Les processus  $I_t(\theta^n)$  et  $I_t^2(\theta^n) - \int_0^t (\theta_s^n)^2 ds$  sont des martingales.

## 1.2 Cas général

Si  $\theta$  est un bon processus, il existe  $\{\theta^n, n \geq 0\}$  suite de processus étagés telle que

$$E \left[ \int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds \right] \rightarrow 0$$

quand  $n \uparrow +\infty$ . Il existe une v.a.  $I_t(\theta)$  de carré intégrable telle que

$$E \left[ |I_t(\theta) - I_t(\theta^n)|^2 \right] \rightarrow 0$$

quand  $n \uparrow +\infty$ . On pose

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$$

pour tout  $t \geq 0$ .

Propriétés:

$$\begin{aligned} E [I_t(\theta)] &= 0 \\ \text{Var} [I_t(\theta)] &= E \left[ \int_0^t \theta_s^2 ds \right]. \end{aligned}$$

**Linéarité :**

$$I_t(a_1\theta^1 + a_2\theta^2) = a_1I_t(\theta^1) + a_2I_t(\theta^2).$$

**Propriétés de martingale :** Pour tout bon processus  $\theta$ , les processus

$$t \mapsto I_t(\theta) \quad \text{et} \quad t \mapsto I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

sont des  $(\mathcal{F}_t^B)$ -**martingales** continues.

$$E [(I_t(\theta) - I_s(\theta))^2 \mid \mathcal{F}_s^B] = E \left[ \int_s^t \theta_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^B \right].$$

**Propriété d'isométrie :** Pour tous bons processus  $\varphi, \theta$  et tout  $s, t \geq 0$ , on a

$$E [I_s(\varphi)I_t(\theta)] = E \left[ \int_0^{s \wedge t} \theta_u \varphi_u du \right].$$

Le processus

$$I_t(\theta)I_t(\varphi) - \int_0^t \theta_u \varphi_u du$$

est une  $(\mathcal{F}_t^B)$ -martingale.

**Proposition 1.2** *Pour tout  $t \geq 0$  on a*

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Il est possible de définir  $I_t(\theta)$  sous la seule condition

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \quad \text{p.s.}$$

Cependant,  $t \mapsto I_t(\theta)$  n'est plus nécessairement une martingale.

**Définition 1.3** Soit  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  une filtration et  $\{X_t, t \geq 0\}$  un processus  $(\mathcal{F}_t)$ -adapté. On dit que  $X$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -**martingale locale** s'il existe une suite  $\{\tau_n, n \geq 0\}$  de  $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt telle que

$$P[\tau_n \rightarrow +\infty] = 1$$

et le processus  $X^n : t \mapsto X_{t \wedge \tau_n}$  est une martingale pour tout  $n \geq 0$ .

**Définition 1.4** On dit que  $\{\theta_t, t \geq 0\}$  est un bon processus local s'il est càglàd,  $(\mathcal{F}_t^B)$ -adapté, et si

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \quad \text{p.s.}$$

pour tout  $t > 0$ .

Soit  $\theta$  un bon processus local. On peut définir  $I_t(\theta)$  pour tout  $t > 0$ , qui est une martingale locale. De même, en prenant la même suite de temps d'arrêt, on montre que le processus

$$I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

est une martingale locale.

**Définition 1.5** *Si  $Z$  est une martingale locale continue,  $\langle Z \rangle$  est l'unique processus croissant continu  $(\mathcal{F}_t)$ -adapté tel que  $t \mapsto Z_t^2 - \langle Z \rangle_t$  soit une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale locale.*

Par polarité, on peut définir le crochet de deux  $(\mathcal{F}_t)$ -martingales locales  $M$  et  $N$  en écrivant

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2} (\langle M + N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t).$$

Le crochet  $\langle M, N \rangle$  est aussi l'unique processus à variation finie tel que le processus  $MN - \langle M, N \rangle$  soit une martingale locale.

Enfin, la proposition suivante donne enfin de  $\langle M, N \rangle$  une importante construction trajectorielle :

**Proposition 1.6** *Soient  $M$  et  $N$  deux martingales locales continues. Alors p.s. pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{2^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})$$

où  $\{t_i^n, i = 0 \dots 2^n\}$  désigne la subdivision régulière sur  $[0, t]$ .

$$\langle I(\theta) \rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 ds \quad \text{et} \quad \langle I(\theta), I(\varphi) \rangle_t = \int_0^t \theta_s \varphi_s ds.$$

On dit que deux martingales continues sont *orthogonales* si leur crochet est nul, c'est-à-dire si leur produit est une martingale. Par exemple, deux Browniens indépendants sont des martingales orthogonales.

## 2 Processus d'Itô

Ce sont des processus écrits sous la forme

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad (2.1)$$

où  $b$  est un processus  $\mathcal{F}_t^B$ -adapté tel que

$$\int_0^t |b_s| ds < +\infty \quad \text{p.s.}$$

pour tout  $t \geq 0$ , et  $\sigma$  un bon processus local. On utilise la notation formelle

$$\begin{aligned} dX_t &= b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

Le coefficient  $b$  s'appelle la *dérive* (ou le *drift*) du processus, et  $\sigma$  son coefficient de diffusion.

Le processus

$$t \mapsto x + \int_0^t b_s ds$$

est la *partie à variation finie* de  $X$ , et le processus

$$t \mapsto \int_0^t \sigma_s dB_s$$

la *partie martingale* de  $X$  (c'est a priori une martingale locale). La décomposition (2.1) du processus  $X$  est unique, au sens où si  $X$  admet une autre décomposition

$$X_t = x + \int_0^t \tilde{b}_s ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_s dB_s,$$

alors  $b \equiv \tilde{b}$  et  $\sigma \equiv \tilde{\sigma}$ . En particulier,  $X$  sous la forme (2.1) est une martingale locale si et seulement si  $b \equiv 0$ .

En fait, cette représentation des martingales locales dans une filtration Brownienne est caractéristique, indépendamment de ce que le processus soit *a priori* un processus d'Itô :

**Théorème 2.1 [Théorème de représentation des martingales locales]** *Soit  $B$  un mouvement brownien et  $M$  une  $\mathcal{F}_t^B$ -martingale locale continue. Alors il existe  $x \in \mathbb{R}$  et  $\theta$  bon processus local tel que*

$$M_t = x + \int_0^t \theta_s dB_s.$$

Ce théorème est extrêmement important en Finance (marché complet).

Si  $X^1$  et  $X^2$  sont deux processus d'Itô de décomposition

$$X_t^i = x + \int_0^t b_s^i ds + \int_0^t \sigma_s^i dB_s$$

pour  $i = 1, 2$ , leur crochet est par définition le crochet de leurs parties martingales. Autrement dit

$$\langle X^1, X^2 \rangle = \langle I(\sigma^1), I(\sigma^2) \rangle .$$

### 3 Formule d'Itô

On se donne un processus d'Itô réel  $X$  de décomposition (2.1) et une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière.

**Théorème 3.1 [Première formule d'Itô]** *Supposons  $f$  de classe  $C^2$ .*

*Alors*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

*Si  $f$  est à dérivées bornées, le processus  $f(X_t) - \int_0^t f'(X_s)b_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds$  est une martingale.*

Cette formule s'écrit sous forme condensée

$$\begin{aligned}
 df(X_t) &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt \\
 &= \left( f'(X_t)b_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 \right) dt + f'(X_t)\sigma_t dB_t \\
 &= f'(X_t)b_t dt + \frac{1}{2}f''(X_t) d\langle X \rangle_t + f'(X_t)\sigma_t dB_t.
 \end{aligned}$$

On utilise souvent la notation

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t \cdot dX_t$$

avec la table de multiplication

	$dt$	$dB_t$
$dt$	0	0
$dB_t$	0	$dt$

En particulier,  $t \mapsto f(X_t)$  est un processus d'Itô de dérive

$$\int_0^t \left( f'(X_s)b_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2 \right) ds$$

et de partie martingale

$$\int_0^t f'(X_s)\sigma_s dB_s.$$

Quand les dérivées sont bornées, l'intégrale stochastique apparaissant dans la formule est une vraie martingale, et on en déduit :

$$E[f(X_t)] = E[f(X_0)] + \int_0^t E \left[ f'(X_s)b_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2 \right] ds$$

$$E [f(X_t) | \mathcal{F}_s^B] = f(X_s) + E \left[ \int_s^t \left( f'(X_u)b_u + \frac{1}{2}f''(X_u)\sigma_u^2 \right) du \mid \mathcal{F}_s^B \right]$$

**Théorème 3.2 [Deuxième formule d'Itô]** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  par rapport à  $x$ . On a

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \sigma_s^2 ds.$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left( f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) \sigma_t^2 \right) dt + f'_x(t, X_t) dX_t \\ &= f'_t(t, X_t) dt + f'_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) d\langle X \rangle_t. \\ &= \left( f'_t(t, X_t) + f'_x(t, X_t) b_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) \sigma_t^2 \right) dt \\ &\quad + f'_x(t, X_t) \sigma_t dB_t \end{aligned}$$

Exemple fondamental: Le **mouvement brownien géométrique**, ou **processus log-normal** est défini par l'équation

$$X_t = x + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

avec  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ . On montre que

$$X_t = x \exp [\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2].$$

Dans le cas où  $\mu$  et  $\sigma$  sont des fonctions déterministes :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s) X_s ds + \int_0^t \sigma(s) X_s dB_s$$

$$X_t = X_0 \exp - \left[ \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds. \right]$$

**Théorème 3.3 [Troisième formule d'Itô]** Soient  $X^1$  et  $X^2$  deux processus d'Itô issus de  $x_1$  (resp. de  $x_2$ ) de coefficient de dérive  $b^1$  (resp.  $b^2$ ), de coefficient de diffusion  $\sigma^1$  (resp.  $\sigma^2$ ) et portés respectivement par deux Browniens  $B^1$  et  $B^2$  corrélés avec coefficient  $\rho$ . On suppose que  $b^i, \sigma^i$  sont  $\mathcal{F}_t^{B^i}$ -adaptés. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  à dérivées bornées. On a

$$f(X_t^1, X_t^2) = f(x_1, x_2) + \int_0^t f'_1(X_s^1, X_s^2) dX_s^1 + \int_0^t f'_2(X_s^1, X_s^2) dX_s^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left( f''_{11}(X_s^1, X_s^2) (\sigma_s^1)^2 + 2\rho f''_{12}(X_s^1, X_s^2) \sigma_s^1 \sigma_s^2 + f''_{22}(X_s^1, X_s^2) (\sigma_s^2)^2 \right) ds$$

où  $f'_i$  désigne la dérivée par rapport à  $x_i$  et  $f''_{ij}$  la dérivée seconde par rapport à  $x_j$  puis  $x_i$ ,  $i, j = 1, 2$ .

**Proposition 3.4** [Formule d'intégration par parties]

$$X_t^1 X_t^2 = x_1 x_2 + \int_0^t X_s^1 dX_s^2 + \int_0^t X_s^2 dX_s^1 + \rho \int_0^t \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds.$$

$$d(X^1 X^2)_t = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + d\langle X^1, X^2 \rangle_t.$$

## 4 Formule de Black & Scholes

On considère un marché financier comportant un actif dit sans risque de taux constant  $r$  et de prix  $S_t^0 = e^{rt}$  et un actif risqué dont le prix  $S$  vérifie

$$dS_t = b S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

soit

$$S_t = S_0 \exp [\sigma B_t + (b - \sigma^2/2)t]$$

On fixe un horizon  $T > 0$  et on souhaite donner le prix d'un actif financier qui versera  $h(S_T)$  à la date  $T$ .

Le cas d'un **call Européen** de maturité  $T$  et de strike  $K$  correspond au cas  $h(x) = (x - K)^+$ .

On procède par duplication (hedging): on forme un portefeuille et d' *alpha* parts de l'actif sans risque (le montant de la richesse investie dans cet actif est  $\alpha e^{rt}$ ) et de  $\beta_t$  parts de l'actif risqué.

On va trouver un portefeuille **auto-financiant** de valeur terminale  $h(S_T)$ .  
La valeur de ce portefeuille à la date  $t$  est

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \beta_t S_t.$$

La condition d'*auto-financement* se formalise par

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \beta_t dS_t;$$

soit

$$dV_t = rV_t dt + \beta_t S_t ((b - r)dt + \sigma dB_t)$$

On suppose que la valeur du portefeuille à la date  $t$  est une fonction déterministe du temps et de la valeur de l'actif risqué, soit  $V(t, S_t)$ .

En utilisant la deuxième formule d'Itô, on calcule

$$dV_t = \left( \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + b S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt + \left( \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) \right) dB_t.$$

En identifiant avec la condition d'auto-financement,

$$\sigma \beta_t S_t + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) = 0 \quad \text{soit} \quad \beta_t = - \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t),$$

ce qui entraîne alors

$$r S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t) - r V(t, S_t) = 0$$

avec pour condition terminale  $V(T, S_T) = h(S_T)$ .

Comme  $S_t$  est une v.a. qui peut prendre toutes les valeurs de  $\mathbb{R}^+$ , on en déduit que  $V$  satisfait l'EDP

$$rx \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) - rV(t, x) = 0$$

(4.1)

avec pour condition terminale  $V(T, x) = h(x)$ .

Dans le cas d'un call européen  $h(x) = (x - K)^+$ , et pour  $\sigma > 0$ , cette équation se résoud alors en :

$$V(t, x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

où  $\mathcal{N}$  est la fonction de répartition d'une v.a. gaussienne standard :

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

et avec les notations

$$d_1 = \frac{1}{2\sigma\sqrt{T-t}} \left( \ln \left( x e^{r(T-t)} / K \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \right) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

La quantité

$$\frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) = \mathcal{N}(d_1)$$

qui représente la *couverture* du marché, soit le nombre de parts de l'actif sous jacent utilisées pour répliquer l'option s'appelle le Delta de l'option et représente aussi la sensibilité du prix de l'option par rapport au prix du sous jacent.

Comme conséquence de la formule d'Itô appliquée aux EDS, on verra plus tard une formule probabiliste pour le prix du call :

$$C(t, S_t) = e^{r(t-T)} E \left[ (\tilde{S}_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

lorsque le  $\tilde{S}$  a pour dynamique

$$d\tilde{S}_t = r\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t dB_t.$$

Cette interprétation est **fondamentale** en Finance, et fait intervenir un changement de probabilité.